第５講　絶対値付き積分

5　次の各問いに答えよ.

(1)　$f(x)=2\sin x-x\cos x$ とする．$0<x<\pi$ において $f(x)>0$ であることを示せ.

(2)　$g(x)=\sin x-kx^2$ (k は正の定数) とする．$0<x<\pi$ において $g(x)=0$ の実数解はただ１つだけ存在することを示せ.

(3)　正の定数 k に対して,

$$\int_0^{\pi}|\sin x-kx^2|dx$$

の値を最小にする k を求めよ.

第５講　絶対値付き積分

5 次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)=2\sin x-x\cos x$ とする．$0<x<\pi$ において $f(x)>0$ であることを示せ．

(2) $g(x)=\sin x-kx^2$ (k は正の定数) とする．$0<x<\pi$ において $g(x)=0$ の実数解はただ１つだけ存在することを示せ．

(3) 正の定数 k に対して，

$$\int_0^{\pi}|\sin x-kx^2|dx$$

の値を最小にする k を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) 略　(3) $\dfrac{\sqrt[3]{4}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt[3]{2}}}{\pi^2}$

【解説】 (1) $f(x)=2\sin x-x\cos x$ より $f'(x)=\cos x+x\sin x$，$f''(x)=x\cos x$ となるので，

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	1	↗		↘	-1

を得る．これにより $f'(x)=0$ かつ $0<x<\pi$ を満たす実数解はただ１つだけ存在するので，それを β とすると

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	π

より，$0<x<\pi$ において $f(x)>0$ であることが示された．

(2) $g(x)=\sin x-kx^2$ より $g'(x)=\cos x-2kx$，$g''(x)=-\sin x-2k$ であり，$0\leqq x\leqq\pi$ のとき $-\sin x\leqq 0$ で，また $k>0$ より，$g''(x)<0$ とわかる．この結果と $g'(0)=1>0$，$g'(\pi)=-1-2k\pi<0$ より $g'(x)=0$ かつ $0<x<\pi$ を満たす実数解はただ１つだけ存在するので，それを γ とすると

x	0	$\cdots$	γ	$\cdots$	π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗		↘	$-k\pi^2$

よって，$0<x<\pi$ において $g(x)=0$ の実数解はただ１つだけであることが示された．

(3)　(2)の結果より，$g(x)=0$ のただ１つの実数解を α とおくと α は

$$k\alpha^2=\sin\alpha \text{ かつ } 0<\alpha<\pi$$

を満たす．このとき

$$\begin{aligned}\int_0^\pi|\sin x-kx^2|dx &= \int_0^\alpha(\sin x-kx^2)dx+\int_\alpha^\pi(-\sin x+kx^2)dx\\ &= \left[-\cos x-\frac{k}{3}x^3\right]_0^\alpha+\left[\cos x+\frac{k}{3}x^3\right]_\alpha^\pi\\ &= -2\cos\alpha-\frac{2}{3}k\alpha^3+\frac{\pi^3}{3}k \quad \cdots①\end{aligned}$$

となる．ここで $k\alpha^2=\sin\alpha \iff k=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha^2}$ を代入すると

$$\begin{aligned}① &= -2\cos\alpha-\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^2}\cdot\alpha^3+\frac{\pi^3}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^2}\\ &= -2\cos\alpha-\frac{2}{3}\alpha\sin\alpha+\frac{\pi^3}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^2}\end{aligned}$$

これを $h(\alpha)$ とおくと

$$\begin{aligned}h'(\alpha) &= 2\sin\alpha-\frac{2}{3}(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)+\frac{\pi^3}{3}\cdot\frac{-2\sin\alpha+\alpha\cos\alpha}{\alpha^3}\\ &= \frac{2\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{3\alpha^3}(2\alpha^3-\pi^3)\end{aligned}$$

となるが，$\alpha^3>0$ であり，(1)より $0<\alpha<\pi$ のとき $2\sin\alpha-\alpha\cos\alpha>0$ なので，$\alpha_1=\dfrac{\pi}{\sqrt[3]{2}}$ とおくと

α	0	$\cdots$	α_1	$\cdots$	π
$h'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$h(\alpha)$		↘		↗	

より $\alpha=\alpha_1$ のとき与式は最小となる．よって求める k は $k=\dfrac{\sin\alpha_1}{{\alpha_1}^2}=\dfrac{\sqrt[3]{4}\sin\frac{\pi}{\sqrt[3]{2}}}{\pi^2}$